



TITLE:

# 不動点集合上の変分不等式問題と 不動点問題の求解法 (函数解析学に よる一般化エントロピーの新展開)

AUTHOR(S):

青山, 耕治

---

CITATION:

青山, 耕治. 不動点集合上の変分不等式問題と不動点問題の求解法 (函数解析学による一般化エントロピーの新展開). 数理解析研究所講究録 2013, 1852: 15-24

ISSUE DATE:

2013-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/195163>

RIGHT:

# 不動点集合上の変分不等式問題と不動点問題の求解法

千葉大学・法経学部 青山 耕治

Koji Aoyama

Faculty of Law and Economics,

Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47J20, 47H09, 47H10.

*Keywords and phrases.* 変分不等式, 非拡大写像, 不動点.

## 概要

文献 [1] で得られた結果の紹介と解説を行う。

## 1 序論

本稿では, 次のような変分不等式問題を考える<sup>\*1</sup>。

**問題 1.1.**  $H$  を実 Hilbert 空間,  $A$  を自己共役な  $H$  上の有界線形作用素,  $\{T_n\}$  を  $H$  上の非拡大写像の列,  $u \in H$ ,  $\gamma \in (0, 1]$  とし,  $\|A\| = 1$  であり,  $A$  は  $\gamma$ -強正であり,  $\{T_n\}$  の共通不動点の集合  $F$  は空ではないと仮定する。このとき, すべての  $y \in F$  に対して

$$\langle y - w, Aw - u \rangle \geq 0$$

となる  $w \in F$  を求めよ。

問題 1.1 の仮定のもとで点列  $\{x_n\}$  を次のように定める。 $x_1$  を  $H$  の任意の点とし, 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$x_{n+1} = \lambda_n u + T_n x_n - \lambda_n A T_n x_n$$

とする。本稿では, この  $\{x_n\}$  が問題 1.1 の解へ収束するための条件について考察し,  $A$  が恒等写像の場合の議論が重要であることを示す。

以下, 本稿の構成は次の通りである。次の第 2 節で, 問題 1.1 の詳細を説明する。第 3 節では,  $\{x_n\}$  が収束するための条件を述べ, その応用例を示す。第 4 節では, 第 3 節の結果を使って導かれる他の結果を紹介する。また, 最後の第 5 節は, 補足事項をまとめたものである。

---

<sup>\*1</sup> この問題の詳細は, 第 2 節で説明する。

## 2 準備 (問題 1.1 について)

本稿では,  $H$  を実 Hilbert 空間,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $H$  の内積,  $\|\cdot\|$  を  $H$  のノルム,  $I$  を  $H$  上の恒等写像,  $\mathbb{N}$  を正の整数の集合とする。

ここでは, 問題 1.1 を理解するために必要な定義などを説明する。

- $T_n$  が  $H$  上の非拡大 (nonexpansive) 写像であるとは,  $T_n$  が  $H$  から  $H$  への写像であり, すべての  $x, y \in H$  に対して

$$\|T_n x - T_n y\| \leq \|x - y\|$$

が成り立つときをいう。

- 問題 1.1 の  $F$  は

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{z \in H : T_n z = z\}$$

と表すこともできる。ここで, 各  $T_n$  の不動点の集合  $\{z \in H : T_n z = z\}$  は閉凸であることが知られているので [12],  $F$  は  $H$  の閉凸部分集合である。

- $H$  上の有界線形作用素  $A$  が  $\gamma$ -強正 ( $\gamma$ -strongly positive) であるとは, すべての  $x \in H$  に対して

$$\langle Ax, x \rangle \geq \gamma \|x\|^2$$

が成り立つときをいう。

- 問題 1.1 の  $\|A\| = 1, \gamma \leq 1$  という仮定は本質的ではなく, 単に  $\|A\| > 0, \gamma > 0$  としてかまわない。しかし, このとき, すべての  $x \in H$  に対して

$$\|A\| \|x\|^2 \geq \langle Ax, x \rangle \geq \gamma \|x\|^2$$

が成り立つから,  $\|A\| \geq \gamma > 0$  であり,  $\tilde{A} = A/\|A\|, \tilde{\gamma} = \gamma/\|A\|$  とおくと,  $\tilde{A}$  は自己共役な有界線形作用素で,  $\|\tilde{A}\| = 1, \tilde{\gamma}$ -強正であり,  $0 < \tilde{\gamma} \leq 1$  となる。さらに,  $\tilde{u} = u/\|A\|$  とおけば,  $w \in F$  のとき

$$\langle y - w, Aw - u \rangle \geq 0 (\forall y \in F) \Leftrightarrow \langle y - w, \tilde{A}w - \tilde{u} \rangle \geq 0 (\forall y \in F)$$

である。したがって, 問題 1.1 では, 最初から  $\|A\| = 1, \gamma \leq 1$  と仮定している。

- 問題 1.1 は, ある凸最小化問題 (問題 5.1) と同値である (第 5 節参照)。

この節の最後に, 問題 1.1 の解が存在することを示しておく。

**命題 2.1.** 問題 1.1 の解は一意的に存在する。

**証明.**  $f = P_F(I - A + u)$  とおく。ここで,  $P_F$  は  $H$  から  $F$  の上への距離射影<sup>\*2</sup>である。 $P_F$  は非拡大であるから, 補助定理 5.3 より,  $f$  は  $H$  上の縮小写像である。実際, 任意の  $x, y \in H$  に対して

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|P_F(x - Ax + u) - P_F(y - Ay + u)\| \\ &\leq \|x - Ax + u - (y - Ay + u)\| \\ &\leq \|I - A\| \|x - y\| \\ &\leq (1 - \gamma) \|x - y\| \end{aligned}$$

が成り立つ。よって, 縮小写像の不動点定理<sup>\*3</sup>により,  $w = fw$  となる点  $w \in H$  がただ一つ存在し, ここでは,  $w \in F$  である<sup>\*4</sup>。さらに, 補助定理 5.4 より,  $f$  の不動点と問題 1.1 の解は一致することがわかるので,  $w$  が問題 1.1 のただ一つの解である。□

このように, 縮小写像  $P_F(I - A + u)$  の不動点が問題 1.1 の解であるから,  $P_F(I - A + u)$  を用いれば, 問題 1.1 の解への収束点列を得ることは容易である。しかし, 本稿では,  $P_F$  を使わずに問題 1.1 の解を近似する方法に焦点をあてる。

### 3 主結果

問題 1.1 の解を求めるために, [14] の成果を踏まえ, 次のような  $H$  の点列  $\{x_n\}$  を考える<sup>\*5</sup>。初項  $x_1$  は  $H$  の任意の点<sup>\*6</sup>とし, 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$x_{n+1} = \lambda_n u + (I - \lambda_n A)T_n x_n \quad (3.1)$$

とする。ここで,  $\{\lambda_n\}$  は  $[0, 1]$  の数列である。

さて, 文献 [11] を参考にして, 次の定理 3.1 を示そう。この定理から,  $\{x_n\}$  の収束性に関しては  $A = I$  のときが重要であることがわかる。

---

<sup>\*2</sup>  $F$  は閉凸であるから, 各  $x \in H$  に対して,  $\|z - x\| = \min\{\|y - x\| : y \in F\}$  となる点  $z \in C$  がただ一つ存在する。 $x$  に  $z$  を対応させる写像を  $P_F$  と表し,  $P_F$  を  $H$  から  $F$  の上への距離射影と呼ぶ。距離射影  $P_F$  は非拡大であることが知られている [12]。

<sup>\*3</sup> 例えば, [12, Theorem 2.4.11]。

<sup>\*4</sup>  $f(H) \subset F$  であるから。

<sup>\*5</sup> 文献 [14] では,  $F$  が一つの非拡大写像の不動点集合の場合, および, 有限個の非拡大写像の共通不動点集合の場合を議論している。

<sup>\*6</sup> 初項  $x_1$  は,  $\{x_n\}$  の極限に影響を与えないことがわかる。例えば, [9, 11]。

**定理 3.1.**  $A, \{T_n\}, F, u$  および  $\gamma$  は問題 1.1 と同じとする。また,  $\{\lambda_n\}$  を  $[0, 1]$  の数列とし,  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$  を仮定する。さらに, 任意の  $v \in H$  に対して次の条件を仮定する。

$y_1 = v$  および各  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$y_{n+1} = \lambda_n v + (1 - \lambda_n) T_n y_n \quad (3.2)$$

で定義される点列  $\{y_n\}$  は  $P_F(v)^{*7}$  に強収束する。

このとき,  $\{x_n\}$  は問題 1.1 の解に強収束する。

**証明.**  $w$  を問題 1.1 の解とし,  $v = w - Aw + u$  とおく。補助定理 5.4 より,  $P_F(v) = w$  である。点列  $\{y_n\}$  を,  $y_1 = v$  および各  $n \in \mathbb{N}$  に対して (3.2) で定義すると, 仮定より

$$y_n \rightarrow P_F(v) = w \quad (3.3)$$

である。したがって,  $x_n - y_n \rightarrow 0$  であることを示せばよい。

各  $T_n$  は非拡大であり,  $w \in F$  であるから

$$\|T_n y_n - w\| \leq \|y_n - w\|$$

が成り立つ。したがって,  $u - v = -(I - A)w$  と補助定理 5.3 より, すべての  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - y_{n+1}\| &= \|(I - \lambda_n A)(T_n x_n - T_n y_n) + \lambda_n (I - A)(T_n y_n - w)\| \\ &\leq \|(I - \lambda_n A)(T_n x_n - T_n y_n)\| + \lambda_n \|(I - A)(T_n y_n - w)\| \\ &\leq (1 - \lambda_n \gamma) \|T_n x_n - T_n y_n\| + \lambda_n (1 - \gamma) \|T_n y_n - w\| \\ &\leq (1 - \lambda_n \gamma) \|x_n - y_n\| + \lambda_n \gamma \frac{1 - \gamma}{\gamma} \|y_n - w\| \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで,  $\lambda_n \gamma \in [0, 1]$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \gamma = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$  だから, (3.3) と補助定理 5.5 より,  $x_n - y_n \rightarrow 0$  となる。よって,  $\{x_n\}$  が  $w$  に強収束することが示せた。□

定理 3.1 より, (3.1) で定義される点列  $\{x_n\}$  が収束するための十分条件を研究する場合は, (3.2) で定義される点列  $\{y_n\}$  が収束するための条件を調べればよいことがわかる。しかし, 問題 1.1 の解を得るために, 点列  $\{y_n\}$  を使うことはできない。なぜなら, 定理 3.1 の証明の中で点列  $\{y_n\}$  は問題 1.1 の解に収束することが示されるが, 点列  $\{y_n\}$  を定義するのに問題 1.1 の解  $w$  を使ってしまったからである。

---

\*7 ここで,  $P_F$  は  $H$  から  $F$  の上への距離射影である。

問題 1.1 の  $F$  が、有限個 ( $N$  個) の非拡大写像の共通不動点集合の場合については、次の定理が知られている。本節の最後に、定理 3.1 を使ってこの定理を示そう。

**定理 3.2** ([14, Theorem 3]<sup>\*8</sup> の  $N = 2$  の場合).  $H, A, u \in H$  を問題 1.1 と同じとする。また、 $F$  を  $H$  上の非拡大写像  $T_1$  と  $T_2$  の共通不動点の集合とし

$$F = F(T_1 T_2) = F(T_2 T_1) \neq \emptyset$$

を仮定する<sup>\*9</sup>。さらに、 $\{\lambda_n\}$  を

$$\lambda_n \rightarrow 0, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty \text{ および } \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+2} - \lambda_n| < \infty$$

を満たす  $[0, 1]$  の数列とし、点列  $\{x_n\}$  を、 $H$  の任意の点  $x_1$  と各  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$x_{n+1} = \lambda_n u + (I - \lambda_n A) T_{[n]} x_n$$

で定義する。ここで、 $n$  が奇数のとき  $T_{[n]} = T_1$ 、 $n$  が偶数のとき  $T_{[n]} = T_2$  とする。このとき、 $\{x_n\}$  は問題 1.1 の解に強収束する。

**証明.** 写像列  $\{T_{[n]}\}$  の共通不動点は  $F$  である。 $v \in H$  を任意にとり、点列  $\{y_n\}$  を、 $y_1 = v$  および  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$y_{n+1} = \lambda_n u + (1 - \lambda_n) T_{[n]} y_n$$

で定義すると [9, Theorem 3.1] より、 $\{y_n\}$  は  $P_F(v)$  へ強収束する。したがって、定理 3.1 より、結論が得られる。  $\square$

## 4 主結果から導かれる結果

ここでは、第 3 節で扱った点列  $\{x_n\}$  が収束するための十分条件を紹介し、定理 3.1 から導かれる結果を述べる。

次の定理を述べる前に、いくつか準備が必要である。 $\{T_n\}$  と  $F$  を問題 1.1 と同じとする。 $\{x_n\}$  を  $H$  の有界点列とすると、 $\{x_n\}$  の弱収積点 (weak cluster point) の全体を  $\omega_w(\{x_n\})$  で表す。 $\{T_n\}$  が条件 (Z) を満たすとは

<sup>\*8</sup> [14, Theorem 3] は、ある凸最小化問題の解への収束定理であるが、補助定理 5.2 によって、問題 1.1 の形の変分不等式問題の解への収束定理とみなすことができる。

<sup>\*9</sup> ここで、 $F(T_1 T_2)$  は  $T_1 T_2$  の、 $F(T_2 T_1)$  は  $T_2 T_1$  の不動点集合である。

点列  $\{x_n\}$  が有界で,  $x_n - T_n x_n \rightarrow 0$  ならば,  $\omega_w(\{x_n\}) \subset F$

が成り立つときをいう [2, 3, 7, 8]。

**定理 4.1** ([1, Theorem 1.2]).  $A, \{T_n\}, F, u$  および  $\gamma$  を問題 1.1 と同じとする。  $\{\lambda_n\}$  を  $[0, 1]$  の点列とし

$$\lambda_n \rightarrow 0, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty \text{ および } \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$$

を仮定する<sup>\*10</sup>。さらに,  $\{T_n\}$  は条件 (Z) を満たし, 任意の空でない  $H$  の有界部分集合  $D$  に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup\{\|T_{n+1}y - T_n y\| : y \in D\} < \infty \quad (4.1)$$

が成り立つと仮定する。このとき,  $x_1 \in H$  および各  $n \in \mathbb{N}$  に対して (3.1) で定義される  $\{x_n\}$  は問題 1.1 の解へ強収束する。

定理 3.1 と次の補助定理を使えば, 定理 4.1 が直ちに得られる。

**補助定理 4.2** ([1, Lemma 3.2], [5, Theorem 3.4]).  $H, \{T_n\}, F$  と  $\{\lambda_n\}$  は, 定理 4.1 と同じとする。  $v \in H$  とし,  $H$  の点列  $\{y_n\}$  を,  $y_1 = v \in H$  および各  $n \in \mathbb{N}$  に対して (3.2) で定義する。  $\{T_n\}$  は条件 (Z) を満たし, 任意の空でない  $H$  の有界部分集合  $D$  に対して (4.1) が成り立つと仮定する。このとき,  $\{y_n\}$  は  $P_F(v)$  へ強収束する。

任意に与えられた非拡大写像列から, 定理 4.1 の仮定を満たす写像列を作り出すことができる。例えば,  $\{S_n\}$  を共通不動点を持つ  $H$  から  $H$  への非拡大写像の列とする。このとき, 写像列  $\{T_n\}$  を,  $T_1 = S_1$  および各  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$T_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} S_k + \frac{1}{2^n} S_{n+1}$$

で定義すると, 次のことがわかる [2, 5]。

- (1)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$  が成り立つ。ここで  $F(S_n), F(T_n)$  は, それぞれ  $S_n, T_n$  の不動点の集合を表す。
- (2)  $\{T_n\}$  は条件 (Z) を満たす。

---

<sup>\*10</sup> 条件  $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$  を「すべての  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\lambda_n > 0$  かつ  $\lambda_n / \lambda_{n+1} \rightarrow 1$ 」に置き換えることができる [5]。

(3) 任意の空でない  $H$  の有界部分集合  $D$  に対して (4.1) が成り立つ。

この他に、文献 [10] の手法を使って、定理 4.1 の仮定を満たす写像列を作り出すこともできる<sup>\*11</sup>。

## 5 補足

ここではまず、問題 1.1 が次の凸最小化問題<sup>\*12</sup>と同値であることを示す。

**問題 5.1.**  $F$ ,  $A$  および  $u$  を問題 1.1 と同じとする。また、関数  $\phi: H \rightarrow \mathbb{R}$  を、 $x \in H$  に対して

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle u, x \rangle$$

で定義する。このとき、 $\phi$  を最小にする  $z \in F$ , つまり

$$\phi(z) = \inf\{\phi(y) : y \in F\}$$

となる  $z \in F$  を求めよ。

問題 5.1 について次のことがわかる。

**補助定理 5.2.** 問題 5.1 の仮定のもとで以下が成り立つ。

- (1)  $\phi$  は凸関数である。
- (2)  $\phi$  は Gâteaux 微分可能である。つまり、すべての  $x, y \in H$  に対して

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(x + ty) - \phi(x)}{t} = \langle Ax - u, y \rangle$$

が成り立つ。

- (3) 問題 5.1 は問題 1.1 と同値である。

**証明.** まず、 $x \in H$  に対して  $\psi(x) = \langle Ax, x \rangle$  で関数  $\psi$  を定義し、 $\psi$  が凸であることを示す。 $x, y \in H$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  とする。 $A$  は線形で正であるから

$$\begin{aligned} \psi(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \langle \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay, \lambda x + (1 - \lambda)y \rangle \\ &= \lambda \langle Ax, x \rangle + (1 - \lambda) \langle Ay, y \rangle \\ &\quad - \lambda(1 - \lambda)[\langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle - \langle Ax, x \rangle - \langle Ay, y \rangle] \end{aligned}$$

---

<sup>\*11</sup> [4, Example 4.5] および [6] も参照。

<sup>\*12</sup> 文献 [10, 13, 14] 参照。



$$\begin{aligned}
&= \lambda\psi(x) + (1-\lambda)\psi(y) - \lambda(1-\lambda)\langle A(x-y), x-y \rangle \\
&\leq \lambda\psi(x) + (1-\lambda)\psi(y)
\end{aligned}$$

が得られる。よって、 $\psi$  は凸である。 $\phi(x) = 1/2\psi(x) - \langle u, x \rangle$  であるから、 $\phi$  が凸であることが示せた。

次に、 $\phi$  が Gâteaux 微分可能であることを示す。 $x, y \in H, t \in \mathbb{R}$  とすると、 $A$  は自己共役であるから

$$\phi(x+ty) = \phi(x) + t\langle Ax - u, y \rangle + \frac{1}{2}t^2\langle Ay, y \rangle$$

が成り立つことがわかる。したがって

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(x+ty) - \phi(x)}{t} = \langle Ax - u, y \rangle + \frac{1}{2}\langle Ay, y \rangle \lim_{t \rightarrow 0} t = \langle Ax - u, y \rangle$$

となる<sup>\*13</sup>。

最後に、問題 5.1 と問題 1.1 と同値であることを示す。 $z$  を問題 5.1 の解とし、 $y \in F, \lambda \in [0, 1]$  とすると

$$\phi(z) \leq \phi((1-\lambda)z + \lambda y) = \phi(z + \lambda(y-z))$$

が成り立つ。したがって、任意の  $\lambda \in (0, 1]$  に対して

$$\frac{\phi(z + \lambda(y-z)) - \phi(z)}{\lambda} \geq 0$$

となる。よって、(2) より、すべての  $y \in F$  に対して

$$\langle Az - u, y - z \rangle = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\phi(z + \lambda(y-z)) - \phi(z)}{\lambda} \geq 0$$

が成り立つので、 $z$  は問題 1.1 の解であることが示せた。次に、 $w$  を問題 1.1 の解とし、 $y \in F$  とする。 $\phi$  は凸であるから、 $\lambda \in [0, 1]$  のとき

$$\phi((1-\lambda)w + \lambda y) \leq (1-\lambda)\phi(w) + \lambda\phi(y)$$

が成り立つ。したがって、すべての  $\lambda \in (0, 1]$  に対して

$$\frac{\phi(w + \lambda(y-w)) - \phi(w)}{\lambda} \leq \phi(y) - \phi(w)$$

---

<sup>\*13</sup>  $t \neq 0$  のとき、 $\left| \frac{\phi(x+ty) - \phi(x)}{t} - \langle Ax - u, y \rangle \right| = \frac{1}{2}|t|\langle Ay, y \rangle| \leq \frac{1}{2}|t|\|A\|\|y\|^2$  となるから、 $\phi$  は微分可能で  $\phi'(x) = Ax - u$  である。

となる。よって, (2) より, すべての  $y \in F$  に対して

$$0 \leq \langle Aw - u, y - w \rangle = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\phi(w + \lambda(y - w)) - \phi(w)}{\lambda} \leq \phi(y) - \phi(w)$$

が成り立つので,  $w$  は問題 5.1 の解であることが示せた。  $\square$

最後に, 本稿で利用した補助定理を列挙しておく。

**補助定理 5.3** ([1, Lemma 2.3] など). 問題 1.1 の仮定のもとで,  $0 \leq \lambda \leq 1$  ならば,  $I - \lambda A$  は, 自己共役な有界線形作用素で,  $\|I - \lambda A\| \leq 1 - \lambda\gamma \leq 1$  が成り立つ。

**補助定理 5.4** ([12, Lemma 5.2.2] など).  $C$  を  $H$  の空でない閉凸部分集合とし,  $x \in H$ ,  $z \in C$  とする。このとき,  $z = P_C x$  であることと, すべての  $y \in C$  に対して  $\langle y - z, x - z \rangle \leq 0$  が成り立つことは同値である。

**補助定理 5.5** ([5, Lemma 2.3] など).  $\{t_n\}$  を非負の数値列,  $\{s_n\}$  を実数列,  $\{\lambda_n\}$  を  $[0, 1]$  の数列とする。さらに, すべての  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $t_{n+1} \leq (1 - \lambda_n)t_n + \lambda_n s_n$   $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n \leq 0$  および  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$  を仮定する。このとき,  $t_n \rightarrow 0$  である。

## 参考文献

- [1] K. Aoyama, *An iterative method for a variational inequality problem over the common fixed point set of nonexpansive mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2010, pp. 21–28.
- [2] ———, *An iterative method for fixed point problems for sequences of nonexpansive mappings*, Fixed point theory and its applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2010, pp. 1–7.
- [3] ———, *Asymptotic fixed points of sequences of quasi-nonexpansive type mappings*, Banach and function spaces III, Yokohama Publ., Yokohama, 2011, pp. 343–350.
- [4] K. Aoyama and Y. Kimura, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7537–7545.
- [5] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2350–2360.

- [6] ———, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed point theory and its applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2008, pp. 1–18.
- [7] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **71** (2009), e1626–e1632.
- [8] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.
- [9] H. H. Bauschke, *The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 150–159.
- [10] I. Kiriara, Y. Kurokawa, and W. Takahashi, *Strong convergence theorem for quadratic minimization problem with countable constraints*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 383–393.
- [11] T. Suzuki, *Moudafi’s viscosity approximations with Meir-Keeler contractions*, J. Math. Anal. Appl. **325** (2007), 342–352.
- [12] W. Takahashi, *Introduction to nonlinear and convex analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.
- [13] H. K. Xu, *An iterative approach to quadratic optimization*, J. Optim. Theory Appl. **116** (2003), 659–678.
- [14] I. Yamada, N. Ogura, Y. Yamashita, and K. Sakaniwa, *Quadratic optimization of fixed points of nonexpansive mappings in Hilbert space*, Numer. Funct. Anal. Optim. **19** (1998), 165–190.